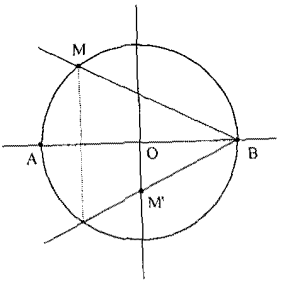
D'où la construction du point M' :



Solution 26 :

Soit $z = x + iy$.

1°/ $4 - z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 4 \Leftrightarrow x = 2$

d'où l'ensemble des points $M(z)$ tels que $4 - z - \bar{z} = 0$ est la droite Δ.

2°/a) On a : $z' = \dfrac{4 - x^2 - y^2}{4 - 2x}$ donc $z' \in \mathbf{R}$.

b) $z' = k \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 = 4k - 2kx$ avec $x \neq 2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2kx + y^2 + 4k - 4 = 0$ avec $x \neq 2 \Leftrightarrow (*)\ (x-k)^2 + y^2 = (k-2)^2$ avec $x \neq 2$.

Si $x = 2$ $(*)$ nous donne $(2-k)^2 + y^2 = (k-2)^2$ d'où $y = 0$

donc Γ est le cercle de centre $I(k,0)$ et de rayon $|k-2|$ privé du point A(2,0)

3°/a) • $|z'-z| = \left|\dfrac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}} - z\right| = \left|\dfrac{4 - z\bar{z} - 4z + z^2 + z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}\right|$

$= \dfrac{|(z-2)^2|}{|4 - z - \bar{z}|} = \dfrac{|z-2|^2}{|4-2x|} = \dfrac{(x-2)^2 + y^2}{|4-2x|}$

• $|z'-2| = \left|\dfrac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}} - 2\right| = \left|\dfrac{-4 - z\bar{z} + 2z + 2\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}\right| = \left|\dfrac{4x - x^2 - y^2 - 4}{4 - 2x}\right|$

$= \dfrac{(x-2)^2 + y^2}{|4-2x|}$ d'où $|z'-z| = |z'-2|$